

จับจุด

● คณิต

พิชิต 9 วิชาฯ

วิเคราะห์แนวข้อสอบ 9 วิชาสามัญ
ทุก **จุด** ! ทุกประเด็นสำคัญ
เก็บข้อสอบพร้อมเฉลยและวิธีทำ

วชิรวิทย์ จักรแก้ว

นักศึกษาคณะแพทยศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

คุยกันก่อนนนน ..

... ต้องบอกน้องๆ ก่อนเลยว่าจาก 2 ปีที่แล้วที่พี่ได้ทำ หนังสือ “จับจุดคณิต พิชิต มข.” <DEMO VERSION>

ออกมานั้น ก็ได้กระแสตอบรับอย่างดี ดีกว่าที่คาดไว้อยะ แต่อันนั้นเป็นของระบบเก่าก็คือ เพื่อการสอบ ตรงของ มข.

(มข.เป็นคนออกข้อสอบเอง) แต่ที่นี้ปัจจุบันนี้ ระบบการศึกษาของประเทศได้มีการเปลี่ยนแปลงการรับเข้าศึกษาต่อในชั้นอุดมศึกษา พี่ก็เลยจัดทำคอร์สใหม่ขึ้นมาเพื่อต่อยอดเนื้อหาในเล่มเดิมด้วย และที่สำคัญเพื่อรองรับระบบ TCAS โดยตั้งใจว่าจะเปิดคอร์สสอนโดยใช้หนังสือเล่มนี้เป็นแกนหลักนี้แหละ โดยจะรีวิวนำในหนังสือเล่มเก่ามันมีอะไรบ้าง สูตร หรือหลักการทางคณิตอะไรที่สำคัญ สูตรไหนที่เราต้องจำให้ได้!!! “ใช้สูตรที่ไม่จำเป็น ก็ไม่ต้องไปจำมัน และพี่คิดว่า หลายคนกำลังเรียนคณิตศาสตร์ผิดวิธี บางคนทำคณิตไปเท่าไรก็ไม่เก่งสักที พี่ก็เลยอยากให้น้องๆ ลองมาเรียนดู จะได้เห็นว่าการบวนการคิดคณิตศาสตร์ที่ดี มันมีprocessอย่างไร มาดูว่าคนที่เขาทำคณิตคล่องๆ ทำคะแนนได้เยอะ เขาคิดกันยังไง โดยโจทย์ที่นำมาเป็นตัวอย่างเป็นตัวอย่างก็คือแนวโจทย์จริงๆ 5 ปีย้อนหลังล่าสุด 9 วิชาสามัญ ปี 2557-2561 พร้อมแยกเป็นบทๆ ให้น้องๆ รวมทั้งเรียงข้อให้ง่ายต่อการจัดลำดับความคิดจากง่ายไปยาก ซึ่งพี่จะแนะนำหลักการน้องๆ ว่าตอนโจทย์ให้มาอะ เราควรเริ่มคิดแบบนั้นนะ เพราะมันจะพาเราไปหาคำตอบได้ ไม่วุ่นวายนะในเขาวงกตของโจทย์ และหลังจากเฉลยข้อนั้นๆ เสร็จ ก็จะมีสรุปความคิดรวบยอด อธิบายว่าทำยังไง ถึงจะทำได้เร็ว ทันเวลา เบี้ยยยยยย... มีแค่นี้แหละ เปิดไปหน้าต่อไปกันเล้ยยยยย ไปลุยเนื้อหา ลุยโจทย์กัน ... (น้องที่ไม่ได้เรียนกับพี่ ก็ยืมเพื่อนไปอ่านได้นะ.....) หากน้องคนไหนสงสัยในข้ออะไร ตรงไหน ทักมาถามได้เลย

FB – Washiraiwit Jakkaew

- Maths for KKU

คุณเคยสัมผัส ถึง cosmo

บ้างมั๊ย...



นศพ.วชิรวิทย์ จักรแก้ว (พีไอซ์)

นักศึกษาแพทย์ชั้นปีที่3 มหาวิทยาลัยขอนแก่น

คำนิยม

"ได้เรียนกับไอซ์จริงจังก็ตอนที่สอบไม่ติดแล้ว 555 พอเริ่มเรียน 2 เดือนเต็ม รู้สึกโทษตัวเองเลยว่า ทำไมไม่มาให้เพื่อนติวเร็วกว่านี้ ไอซ์มีการสอนที่แตกต่างจากครู/ติวเตอร์คนอื่น คือจะไม่สอนเราก่อน แต่จะให้ทำโจทย์เลย แล้วก็จับเวลาด้วยนะ พอดิฉันก็จะโดน...มีความสุขมากกว่าเรียนกับครู 555 เรียนแล้วไม่เครียด สนุก มีมุขผัดมาเล่นประจำ วิธีย่อยเข้าใจง่าย อธิบายเป็นขั้นตอนไม่ข้ามเลย ไม่เข้าใจก็ถามซ้ำเลย คนสอนใจดี ไปมาๆสอนให้เราอ่านเฉลยจากคู่มือเฉย(อันนี้ขมนะ เพราะบางครั้งไม่เข้าใจจริงๆ) ถ้าน้องได้มาเรียนแล้วจะไม่ผิดหวังแน่นอน เรียนแล้วไฟในการทำโจทย์จะลุกโชน พี่ไอซ์จะปลุกความขยันในตัวเราขึ้นมาอีกครั้ง"

นส.ชนิกานต์ หอมไกล นักศึกษาคณะทันตแพทยศาสตร์

"พี่เป็นเพื่อนกับไอซ์มานานแล้วละ พี่จึงรู้ว่าไอซ์เก่งมาก 555 พี่จึงขอให้ไอซ์ติวคณิตเข้ามาหาเลยให้ ไอซ์ช่วยพี่ได้มากจริงๆนะน้อง ไอซ์จะมีวิธีคิดรวบรัด วิธีตีๆที่คิดขึ้นมาเองแล้วก็ใช้ได้จริง ไอซ์จะคอยบอกว่าต้องทำได้เร็วกว่านี้ ช้อไหนห้ามข้ามเด็ดขาด ทำให้เรามีแรงกระตุ้นในการทำโจทย์มากขึ้น ดีๆน้อง มาเรียน ^^

นศพ.ธัญกมล คำชัยภูมิ นักศึกษาแพทยศาสตร์

"แต่ก่อนทำโจทย์คณิตไม่ค่อยได้ พอมาเรียนกับพี่ไอซ์เลยพอจะทำขึ้นมาได้บ้าง เพราะพี่เค้าใส่ใจ คอยดูจุดที่เราผิด คอยแนะนำวิธีที่ถูก แถมพี่เค้าใจดี ทำให้คุยด้วยได้ไม่เกร็ง เวลาสงสัยเลยกล้าบอกพี่เค้าตรงๆ ทำให้พัฒนาขึ้นมาได้ ต้องขอบคุณพี่ไอซ์จริงๆนะคะ

นศพ.เบญจลักษณ์ หิรัญโชติ นักศึกษาแพทยศาสตร์

ต้องบอกก่อนว่าพี่ไม่ใช่คนที่เก่งคณิตศาสตร์เลย น้องๆหลายคนอาจจะสงสัยว่า ที่ผ่านมามีได้ยังไง ตอนแรก พี่ก็ทำโจทย์พูดทั่วๆไป ทำเป็นพูด ตรวจแล้วทำความเข้าใจ แต่หลังจากคะแนนคณิตศาสตร์รอบแรกออกมาพี่ก็เริ่มสงสัยว่า รอบที่แล้วผ่านเพราะดวงหรือเปล่า แล้วครั้งหน้าจะดวงดีไหม เวลาที่เหลือน้อยจะสอบรอบที่ 2 แล้วทำไงดีพี่ก็ตัดสินใจให้เพื่อนติวให้ นั่นก็คือพี่ไอซ์นั่นเอง!!!ปรบมือ !!!!! ซึ่งการไปติวในเวลาสั้นๆนี้ ทำให้พี่เรียนรู้ว่า ที่เรียนผ่านมามีทั้งหมดนั้น เรารู้เนื้อหาทั้งหมดก็จริง แต่สิ่งที่เราขาดคือ การจับจุดข้อสอบ ว่าเรื่องนี้ออกอะไร เจอแล้วเราต้องทำยังไง เพราะพี่จับจุดข้อสอบได้แล้ว คะแนนสอบพี่ก็ดีขึ้นมากๆ โอกาสดีๆมาถึงแล้วนะน้องที่มีหนังสือเล่มนี้ที่จะช่วยน้องๆวิเคราะห์ข้อสอบ ในแต่ละหัวข้อน้องไม่ต้องเสียเวลาวิเคราะห์เอง โอกาสดีๆแบบนี้มาแล้วพี่บอกเลย "หนังสือเล่มนี้ไม่มีไม่ได้"

น.ศ.พ.ปริชญ์พร ขู่วิธี นักศึกษาแพทยศาสตร์

THANK YOU

การจะเกิดคอร์สนี้ ขึ้นมาได้ ต้องขอขอบคุณ คุณพ่อ คุณแม่ ที่เป็นกำลังใจให้ทั้งในการเรียน ใน
ขณะที่แสนหนัก แทบจะไม่มีเวลาพักผ่อนอยู่แล้ว สอบทุกเดือน อ่านหนังสือถึงตีสอง ตีสามทุก
วัน อ่านหนักกว่าตอนสอบเข้าเยอะมากกกกก.... ขอบคุณเพื่อนๆ ที่คอยช่วยเหลือ ช่วยทำใบ
ชัวร์ ช่วยทำหน้าปก ช่วยพิมพ์หนังสือกัน กว่าเล่มนี้จะเสร็จสมบูรณ์ก็นานพอสมควร เพราะมา
นั่งคิดว่า จุดไหน จะเหมาะกับน้องๆ อยากให้น้องๆรู้เท่าที่จำเป็นจริงๆ มานั่งพิมพ์โจทย์ข้อสอบ
กัน มาดูว่าเอาข้อไหนมาขึ้นก่อน แล้วน้องๆจะเข้าใจในเนื้อหามากที่สุด มาเน้นเนื้อหาที่สำคัญ
เพราะไม่อยากให้จำสูตรเยอะเลย ไม่มีมพิมพ์สมการ สร้างกราฟ ที่แรมสูงๆ ก็เอาให้ยืม และก็
ขอบคุณทุกคนที่ช่วยโปรโมทคอร์ส ทั้งน้องๆ **presenter** น้องๆที่เคยเรียนกับพี่ จนสอบติด
ไปแล้ว ก็ยังช่วยโปรโมทเรื่อยๆ ตั้งใจมากๆเลย

PAGES

SET
LOGIC
NUMBER THEORY
REAL NUMBER
MATRIX
FUNCTION
GEOMETRY
TRIGONOMETRY
LOGARITHM
COMPLEX NIUMBER
COMBINATORICS
CALCULUS
GRAPH THEORY
LINEAR

ลองฝึกทำ โจทย์ย้อนหลัง 5 พศ. แบบจับเวลา

ปี พศ.	คะแนนก่อน เรียน	คะแนนหลัง เรียน
2557		
2558		
2559		
2560		
2561		

ก่อนเรียนน้องๆจะได้เท่าไรนั้นไม่สำคัญ แต่อยากให้ลองทำข้อสอบเพื่อประเมินตัวเองดู ว่าคุณเองบกพร่องเยอะมั้ย อาการน่าเป็นห่วงหรือไม่กับวิชานี้ 555555+ แต่ทั้งนี้ พี่เชื่อว่าเมื่อน้องๆเรียนจบคอร์สแล้ว คะแนนน้องๆจะพุ่งขึ้นอย่างแน่นอน หายห่วงได้เลย แต่จำไว้เลยนะ ถ้าเรา**สะเพร่า**อะ ก็ได้อ 0 คะแนนอยู่ดีซื่อนั้น ถึงแม้ว่าเราจะคิดถูกวิธีก็เถอะ **เพราะ**

สุดท้ายคนที่ได้คะแนน คือคนที่ตอบข้อที่ถูก สุดท้ายพี่ก็ขอฝากไว้ว่า**ความพยายามอยู่ที่**

ไหน ความสำเร็จก็อยู่ตรงนั้นแหละ

The best preparation for tomorrow is doing your best today.

H. Jackson Brown, Jr.



วิชา	ช่วงคะแนน	0.00-10.00	10.01-20.00	20.01-30.00	30.01-40.00	40.01-50.00	50.01-60.00	60.01-70.00	70.01-80.00	80.01-90.00	90.01-100.00	รวม
คณิตศาสตร์ 1	จำนวนคน	5,584	34,833	43,575	20,482	7,208	3,031	1,429	774	379	210	117,505
	ร้อยละ	4.75	29.64	37.08	17.43	6.13	2.58	1.22	0.66	0.32	0.18	100.00



สรุปเรื่อง SET

ก่อนอื่นเราต้องรู้พื้นฐานของเรื่องเซตกันก่อนครับ

- สัญลักษณ์ของเซต

$\in$ แทนการเป็นสมาชิก ส่วน $\notin$ แทนการไม่เป็นสมาชิก

เช่น " $x \in A$ " คือ x เป็นสมาชิกของเซต A

" $x \notin A$ " คือ x ไม่เป็นสมาชิกของเซต A

* วิธีการเขียนเซต เราสามารถเขียนได้หลายแบบเลย เช่น

1. **แบบแจกแจงสมาชิก** การเขียนแบบนี้ เราจะเขียนสมาชิกทุกตัวในเครื่องหมายปีกกา

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

2. **แบบบอกเงื่อนไข**

โครงสร้างของเซตแบบบอกเงื่อนไข เขียนได้ดังนี้

$$\{x / \text{เงื่อนไขของ } x\}$$

$$A = \{x \in \mathbb{I}^+ / 1 \leq x \leq 3\} \text{ ซึ่งก็คือ } A = \{1, 2, 3\} \text{ นั่นเอง}$$

- เซตที่เท่ากัน

เซต A เท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อเซตทั้งสองมีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว

เขียนแทนด้วย $A = B$

เช่น ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 2, 1\}$

ดังนั้น $A = B$

- เซตที่เทียบเท่ากัน (อันนี้คือเทียบเท่า ไม่ใช่เท่า) 55555+

เซต A เทียบเท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ จำนวนสมาชิกในเซตทั้งสองเท่ากัน

เช่น ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$

ซึ่งจำนวนสมาชิกของสองเซตนี้เท่ากัน เราเลยได้ว่า เซต A เทียบเท่าเซต B

* จำนวนสมาชิกในเซต

จำนวนสมาชิกของเซต A เราจะเขียนแทนด้วย $n(A)$

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ เราจะได้ว่า } n(A) = 3$$

ชนิดของเซต

- เซตจำกัด คือ เซตที่สามารถบอกได้ว่ามีจำนวนสมาชิกในเซตอยู่เท่าไร
- เซตอนันต์ คือ เซตที่ไม่สามารถนับจำนวนสมาชิกได้

สับเซต (ใช้มีดมัย)

- สัญลักษณ์ " $A \subset B$ "
- เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทั้งหมดในเซต A อยู่ในเซต B ด้วย
- เช่น $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 4, 6, 8\}$ เราเลยได้ว่า $A \subset B$

- ส่วนถ้า $A \not\subset B$ นั้นหมายถึง เซต A ไม่เป็นสับเซตของ B เพราะว่ามีสมาชิกของ A อย่างน้อยหนึ่งตัว ที่ไม่เป็นสมาชิกของ B

$$\text{เช่น } A = \{1, 3\} , B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$$

เห็นมัยว่า 3 อะ มันเป็นสมาชิกใน A แต่มันไม่เป็นสมาชิกใน B เราเลยได้ว่า $A \not\subset B$

สมบัติของสับเซต

- เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต " $\emptyset \subset A$ "
- จำนวนสับเซตของ A จะเท่ากับ $2^{n(A)}$ เซต

สับเซตแท้

นิยามของมันก็คือ

A เป็นสับเซตแท้ของ B ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $A \neq B$

ดังนั้นเราเลยได้ว่า ถ้า A มีจำนวนสมาชิก n ตัว จำนวนสับเซตแท้ของ $A = 2^n - 1$

หัดลองวิเคราะห์ดู

- ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset A$ แล้วจะได้ว่า $A = B$

เพาเวอร์เซต คือ เซตของสับเซต A ทุกเซตเขียนแทนด้วย $P(A)$ ก็คือ $P(A) = \{x / x \subset A\}$

สมบัติของเพาเวอร์เซต

- $\emptyset \in P(A)$
- $A \in P(A)$
- $P(A) \neq \emptyset$
- $n(P(A)) = 2^n$, $n(P(P(A))) = 2^{2^n}$, $n(P(P(P(A)))) = 2^{2^{2^n}}$ ไล่ไปเรื่อยๆเลย
- $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$
- $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

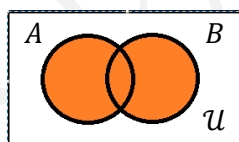
- **เอกภพสัมพัทธ์** เขียนแทนด้วย U

- **OPERATION OF SET**

- **ยูเนียน** ใช้สัญลักษณ์ $\cup$

$A \cup B$ คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกจากเซต A หรือเซต B

เช่น $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{3, 4, 5\}$ จะได้ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

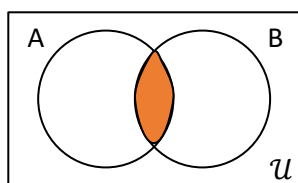


พิมพ์สมการที่นี้

- **อินเตอร์เซกชัน** ใช้สัญลักษณ์ $\cap$

$A \cap B$ คือ เซตที่มีสมาชิกอยู่ในทั้งของเซต A และ B

เช่น $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{3, 2, 4\}$ จะได้ $A \cap B = \{2, 3, 4\}$

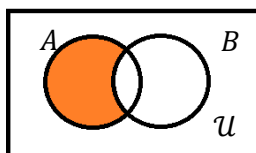


พิมพ์สมการที่นี้

- ผลต่าง ใช้สัญลักษณ์ -

$A - B$ หมายถึง เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต A แต่ต้องไม่ใช่สมาชิกของเซต B

เช่น $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{3, 4, 5, 6\}$ จะได้ $A - B = \{1, 2\}$

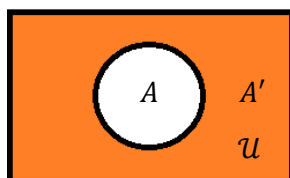


- คอมพลีเมนต์ ใช้สัญลักษณ์ ' หรือ c

คอมพลีเมนต์ของ A คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน U ไม่อยู่ใน A

เช่น $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{7, 9, 5\}$, $A' = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$



สมบัติของยูเนียน , อินเตอร์เซกชัน

สมบัติของยูเนียน	สมบัติของอินเตอร์เซกชัน
$A \cup B = B \cup A$ (สลับที่ได้)	$A \cap B = B \cap A$ (สลับที่ได้)
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (เปลี่ยนกลุ่มได้)	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (เปลี่ยนกลุ่มได้)
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \cup U = U$	$A \cap U = A$
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \emptyset$
$A \cup B = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$	$A \cap B = B$ ก็ต่อเมื่อ $B \subset A$
$A \cup B = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A = \emptyset$ และ $B = \emptyset$	

-

- สมบัติการแจกแจง

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

สมบัติของคอมพลีเมนต์

$$(A')' = A$$

$$\text{ส่วน } ((A')')' = A'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

สมบัติของผลต่าง

$$A - A = \emptyset$$

$$A - \emptyset = A$$

$$\emptyset - A = \emptyset$$

$$A - A' = A$$

$$A - U = \emptyset$$

$$A - B \subset A$$

$$A - B = A \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad A \cap B = \emptyset$$

$$A - B = \emptyset \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad A \subset B$$

$$\text{เดียวพาววิเคราะห์ไม่ต้องจำหมด} \quad A - B = A \cap B' = B' \cap A = B' = A'$$

$$A - B' = A \cap B$$

จำนวนสมาชิก

- แบบ 2 เซต

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

- แบบ 3 เซต

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

- แบบ 4 เซต (ไม่น่าออก แต่จะแถม จดๆ)

การให้เหตุผล

- การให้เหตุผลแบบนิรนัย

- เราอาจใช้แผนภาพเวนนิง – ออยเลอร์ช่วยในการให้เหตุผลแบบนิรนัย

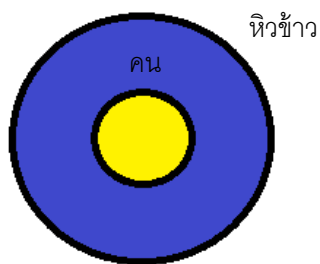
- หรือใช้ feeling เขาก็ได้ ประมาณว่า จำเป็นด้วยหรือ 55555+

Example

- เหตุ**
1. ทุกคนหิวข้าว
 2. กนกไม่หิวข้าว

ผล กนกไม่ใช่คน

Solⁿ เขียนแผนภาพเวนนิง - ออยเลอร์ ให้สอดคล้องกับเหตุที่โจทย์กำหนดให้ ดังนี้



จะเห็นว่าแผนภาพสอดคล้องกับผลที่กำหนดให้

ดังนั้น สมเหตุสมผล

Example

- เหตุ**
1. นักเรียนบางคนขี้วัน
 2. สมชายขี้วัน

ผล สมชายเป็นนักแสดง

อ่านแล้ว มันขัดๆมัย เขาก็เลย สรุปได้เลยอะ ว่า ไม่สมเหตุสมผล

ตัวอย่างข้อสอบเก่า 9 วิชาสามัญ SET

9 วิชา ปี 2560

กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $B = \{3, 4, 5, 6\}$

จำนวนสับเซต C ของ A ซึ่ง $C \cap B$ มีสมาชิก 2 ตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 32 2. 48 3. 64 4. 80 5. 96

Maths by icewashi

"ความพยายาม" ไม่ได้การันตี
...ว่าจะไม่พ่ายแพ้
แต่ที่แน่ๆ **"ความท้อแท้"**
ก็ไม่เคยทำให้ใครชนะ

-ปรัชญาอารมณ์ศิลป์-

www.junjaowka.com
www.facebook.com/junjaowkaPage

LOGIC

P	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim P$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

น้องๆ ทุกคนต้องรู้ อันนี้ นะครับ หัวใจสำคัญเลย โดยเฉพาะ ตรงที่ แรกเงา

ทีนี้ถ้าเป็นผลลัพธ์มาให้ก่อน เราก็ค่อยๆวิเคราะห์ มาดูตัวอย่างกันเลยนะ

- ถ้า $p \wedge q \equiv T$ เราจะได้ว่า $p \equiv T$ และ $q \equiv T$
- ถ้า $p \vee q \equiv F$ เราจะได้ว่า $p \equiv F$ และ $q \equiv F$
- ถ้า $p \rightarrow q \equiv F$ เราจะได้ว่า $p \equiv T$ และ $q \equiv F$
- ถ้า $p \wedge q \wedge r \wedge S \equiv T$ เราจะได้ว่า $p \equiv T$ และ $q \equiv T$ และ $r \equiv T$ และ $S \equiv T$
- ถ้า $p \vee q \vee r \vee S \equiv F$ เราจะได้ว่า $p \equiv F$ และ $q \equiv F$ และ $r \equiv F$ และ $S \equiv F$

** ทีนี้ถ้าเจอแบบนี้ เราก็ต้องวิเคราะห์ให้ได้นะ ว่า มันจะได้ T เสมอ

$$p \vee T \equiv T$$

$$T \vee p \equiv T$$

$$\sim p \vee p \equiv T$$

$$p \vee \sim p \equiv T$$

$$F \rightarrow P \equiv T$$

$$P \rightarrow T \equiv T$$

$$p \leftrightarrow p \equiv T$$

**ทีนี้ถ้าเจอแบบนี้ เราก็ต้องวิเคราะห์ให้ได้นะ ว่า มันจะได้ F เสมอ

$$p \wedge F \equiv F$$

$$F \wedge p \equiv F$$

$$\sim p \wedge p \equiv F$$

$$p \wedge \sim p \equiv F$$

$$p \leftrightarrow \sim p \equiv F$$

$$\sim p \leftrightarrow p \equiv F$$

ถ้าเจอนิเสธหลายอันก็แบบนี้

$$\sim \sim p \equiv p$$

$$\sim \sim \sim p \equiv \sim p$$

$$\text{ดังนั้น } \sim \sim \sim \sim p \equiv p$$

มาดูตัวอย่างเพิ่มเติม

- $p \vee F \equiv p$
- $p \wedge T \equiv p$
- $p \rightarrow F \equiv \sim p$
- $p \vee p \equiv p$
- $p \wedge p \equiv p$
- $\sim p \rightarrow p \equiv p$
- $T \rightarrow p \equiv p$
- $T \leftrightarrow p \equiv p$

สมบัติที่สำคัญ

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

แต่

$$p \rightarrow q \not\equiv q \rightarrow p$$

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$p \vee (p \vee q) \equiv (p \vee q) \vee r \equiv p \vee q \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge q \wedge r$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$(p \wedge r) \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge r$$

$$(p \vee r) \wedge (q \vee r) \equiv (p \vee q) \wedge r$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$$

EX. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ใด

ประพจน์ $[(p \wedge \sim q) \vee \sim p] \rightarrow [(r \vee s) \wedge (r \vee \sim s)]$ สมมูลกับประพจน์ใด

$$1. p \rightarrow r$$

$$2. q \rightarrow r$$

$$3. (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

$$4. (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

* **สัจนิรันดร์** คือ เป็นประพจน์ที่เป็นจริงทุกกรณีอะ

วิธี check ว่าเป็นสัจนิรันดร์มั้ย ก็ **มี**

ขั้นตอนในการเช็ค มีดังนี้

1. เราจะสมมติให้เป็น **F**

2. - ถ้าเกิดข้อขัดแย้งแสดงว่า เป็น **F** ไม่ได้ ดังนั้นมันจะเป็นจริงเสมอ นั่นก็คือเป็นสัจนิรันดร์

- ถ้าไม่เกิดข้อขัดแย้ง แสดงว่าเป็น **F** ได้ ดังนั้น ไม่เป็นสัจนิรันดร์

EX. ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์

$$1. (p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim (p \rightarrow q)$$

$$2. [(p \rightarrow q) \wedge \sim p] \rightarrow \sim q$$

$$3. [\sim p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$$

$$4. [p \wedge (\sim p \wedge q)] \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

Solution

ตัวบ่งปริมาณ For some For ALL

$\forall x [P(x)]$ หมายถึง ทุก x ใน U

$\exists x [P(x)]$ หมายถึง บาง x ใน U

เมื่อทุก x ใน U ทำให้ $P(x) \equiv T$ เราจะได้ว่า $\forall x [P(x)] \equiv T$

เมื่อมี x อย่างน้อย 1 ตัว ที่ทำให้ $P(x) \equiv F$ เราจะได้ว่า $\forall x [P(x)] \equiv F$

เมื่อมี x อย่างน้อย 1 ตัว ที่ทำให้ $P(x) \equiv T$ เราจะได้ว่า $\exists x [P(x)] \equiv T$

เมื่อไม่มี x ใดใน U ทำให้ $P(x) \equiv T$ เราจะได้ว่า $\exists x [P(x)] \equiv F$

$\forall x \forall y [P(x, y)] \equiv T$ เมื่อทุก $(x, y) \in U \times U$ ต้องทำให้ $P(x, y) \equiv T$ ทั้งหมด

$\forall x \forall y [P(x, y)] \equiv F$ เมื่อมี (x, y) อย่างน้อย 1 คู่ ที่ทำให้ $P(x, y) \equiv F$

$\exists x \exists y [P(x, y)] \equiv T$ เมื่อมี (x, y) อย่างน้อย 1 คู่ ที่ทำให้ $P(x, y) \equiv T$

$\exists x \exists y [P(x, y)] \equiv F$ เมื่อไม่มี (x, y) เลยที่ทำให้ $P(x, y) \equiv T$

$\exists x \forall y [P(x, y)] \equiv T$ เมื่อมี x อย่างน้อย 1 ตัว ที่นำไปจับกับ y ทุกตัวแล้วทำให้ $P(x, y) \equiv T$ เป็นจริง

$\exists x \forall y [P(x, y)] \equiv F$ เมื่อไม่มี x ตัวไหนเลยที่นำไปจับกับ y แล้วทำให้ $P(x, y) \equiv T$ เป็นจริง

$\forall x \exists y [P(x, y)] \equiv T$ เมื่อ x ทุกตัวต้องสามารถหา y อย่างน้อย 1 ตัวมาจับกับมันแล้วทำให้ $P(x, y) \equiv T$ เป็นจริง

$\forall x \exists y [P(x, y)] \equiv F$ เมื่อมี x บางตัวที่ไม่สามารถหา y มาคู่ แล้วทำให้ $P(x, y) \equiv T$ เป็นจริงได้

MUST KNOW ใส่นี้เลขแล้วมันจะตรงข้ามเลย

$$\sim \forall x [P(x)] \equiv \exists x [\sim P(x)]$$

$$\sim \exists x [P(x)] \equiv \forall x [\sim P(x)]$$

$$\sim \forall x \forall y [P(x, y)] \equiv \exists x \exists y [\sim P(x, y)]$$

$$\sim \forall x \exists y [P(x, y)] \equiv \exists x \forall y [\sim P(x, y)]$$

$$\sim \exists x \forall y [P(x, y)] \equiv \forall x \exists y [\sim P(x, y)]$$

$$\sim \exists x \exists y [P(x, y)] \equiv \forall x \forall y [\sim P(x, y)]$$

EX. กำหนด $U = \{1, 2, 3\}$ จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $\forall x \exists y [x^2 + y^2 < 12] \equiv T$ 2. $\exists x \forall y [x^2 < y + 1] \equiv T$

3. $\exists x \exists y [5x - 7y = 1] \equiv F$ 4. $\forall x \forall y [x + y < 6] \equiv F$

SOLUTION

Maths by icewashi

- การอ้างเหตุผล

1. เราจะสมมุติว่าผลเป็น **F** (เป็น **F** ก็คือไม่สมเหตุสมผลอะ)

2. ให้เหตุผลทั้งหมด เป็น **T**

3. - ถ้าเกิดข้อขัดแย้ง แสดงว่าผลเป็น **F** ไม่ได้ ดังนั้นผลเลยต้องเป็น **T** มันเลยสมเหตุสมผล

- ถ้าไม่เกิดข้อขัดแย้ง แสดงว่าผลมันเป็น **F** ดังนั้น มันเลยไม่สมเหตุสมผล

*ทั้งนี้เราอาจใช้ **SENSE** ในการตอบได้เลย ไม่ต้องใช้วิธีข้างบนก็ได้

EX. จงหาว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. ถ้าไฟช้อกระเป๋าสีดำแล้วไฟจะมีความสุข

2. ถ้าไฟมีความสุขแล้วแม่ของไฟมีความสุข

3. แม่ของไฟไม่มีความสุข

ผล ไฟไม่ได้ช้อกระเป๋าสีดำ

Solution

EX. จงหาว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. $p \rightarrow (q \vee r)$

2. $\sim q \vee \sim r$

ผล $\sim p$

Solution

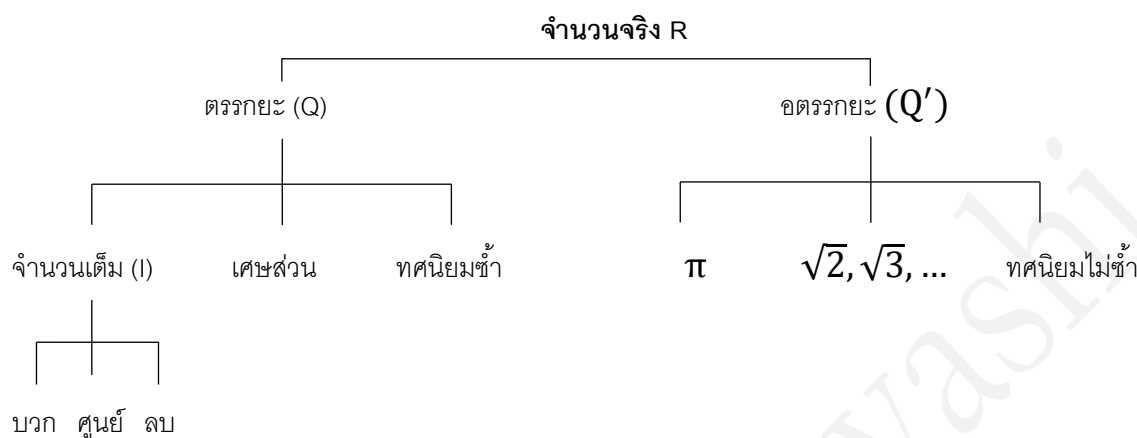
Maths_by_icewashi

THE ONLY WAY
===== *TO DO* =====
GREAT WORK
===== ♦ IS ♦ =====
TO LOVE
=====
WHAT YOU DO
=====

- STEVE JOBS -



REAL NUMBER



สูตรแยกตัวประกอบ

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
7. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

สมบัติของระบบจำนวนจริง

	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a + b \in \mathbb{R}$	ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a \times b \in \mathbb{R}$
สมบัติการสลับที่	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	0 เป็นเอกลักษณ์การบวก $0 + a = a = a + 0$	1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ $1 \times a = a = a \times 1$
สมบัติการมีอินเวอร์ส	$-a$ เป็นอินเวอร์สการบวกของ a	$\frac{1}{a}$ เป็นอินเวอร์สการคูณ เมื่อ $a \neq 0$
สมบัติการแจกแจง	$a(b + c) = ab + ac$	

เอกลักษณ์ " $e * a = a = a * e$ "

คือ ตัวที่ไปกระทำกับจำนวนใดๆ ก็ตามในเซต แล้วได้ผลลัพธ์เท่าเดิม

เช่น มาดูการหาเอกลักษณ์การบวก

เราจะได้ว่า $0 + a = a = a + 0$ ดังนั้นเอกลักษณ์การบวก คือ 0

มาดูการหาเอกลักษณ์การคูณ

$1 \times a = a = a \times 1$ ดังนั้นเอกลักษณ์การคูณ คือ 1

อินเวอร์ส ($a^{-1} * a = e = a * a^{-1}$)

อินเวอร์สของ a กระทำกับ a จะได้ผลลัพธ์เป็นเอกลักษณ์

เช่น มาดูการบวกกัน $(-1) + 1 = 0 = 1 + (-1)$

เราจะได้ว่า -1 เป็นอินเวอร์สการบวกของ 1

$$\text{มาดูการคูณกันบ้าง } \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

เลยได้ว่า $\frac{1}{2}$ จึงเป็นอินเวอร์สการคูณของ 2

*****ดังนั้นการที่เราจะหาอินเวอร์สได้ เซตนั้นจะต้องมีเอกลักษณ์ก่อนนะ*****

การหาคำตอบของ สมการกำลัง 2 $ax^2 + bx + c = 0$

แบบที่ 1

Example จงแก้สมการ $x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

$$\therefore x = -2, -3$$

แบบที่ 2 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

โดยที่ 1) เมื่อ $b^2 - 4ac > 0$ สมการจะมี 2 คำตอบ

2) เมื่อ $b^2 - 4ac = 0$ สมการจะมี 1 คำตอบ

3) เมื่อ $b^2 - 4ac < 0$ สมการจะไม่มีคำตอบ

ต่อไปเรามาดูเทคนิคอื่นๆ ของการหาเศษ แล้วก็การแยกตัวประกอบกัน

- ทฤษฎีบทเศษเหลือ

$P(x)$ หารด้วย $x - c$ เศษจะเท่ากับ $P(c)$

EX. เมื่อ $P(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ หารด้วย $x - 1$ จะได้เศษเท่ากับเท่าใด

$$\text{เศษ} = P(1) = (1)^3 - (1)^2 + 1 + 1 = 2$$

เมื่อ $P(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ หาค่าด้วย $2x + 1$ จะได้เศษเท่ากับเท่าใด

$$\text{เศษ} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{8}$$

MUST KNOW -

$P(x)$ จะมี $x - c$ เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ $P(x) = 0$

- วิธีการหารสังเคราะห์

EX. หาค่า $x^3 - x^2 - x + 2$ ด้วย $x + 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\text{ผลหาร} = 1 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1 \text{ เศษ } 1$$

$$= x^2 - 2x + 1 \text{ เศษ } 1$$

- การแยกตัวประกอบ โดยใช้เทคนิคการหารสังเคราะห์

EX. จงแยกตัวประกอบ $x^3 + 2x^2 - x - 2$

SOLUTION ให้ $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

1. ตัวประกอบของ -2 ได้แก่ $\pm 1, \pm 2$

$$P(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - 1 - 2 = 0$$

แสดงว่า $x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

3. เข้าสู่กระบวนการหารสังเคราะห์

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & 0 & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$x - 2 \text{ หาร } x^3 + 2x^2 - x - 2 \text{ ได้ผลหารคือ } x^2 + 3x + 2$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 + 2x^2 - x - 2 &= (x - 1)(x^2 + 3x + 2) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x + 2) \end{aligned}$$

EX. จงแยกตัวประกอบ $12x^3 - 16x^2 - 5x + 3$

SOLUTION

Viete's Formula

$$P(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

$$\text{ผลบวกของคำตอบทั้งหมด} (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) = -a_{n-1}$$

$$\text{ผลคูณของคำตอบทั้งหมด} (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_n) = \begin{cases} a_0 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็น เลขคู่} \\ -a_0 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็น เลขคี่} \end{cases}$$

EX. $x^3 - 3x^2 - 5x + 4 = 0$ จงหาผลบวกและผลคูณของคำตอบ

$$\text{ผลบวกของคำตอบทั้งหมด} = -(-3) = 3$$

$$\text{และผลคูณคำตอบทั้งหมด } n = 3 \text{ (เลขคี่)}$$

$$\text{ดังนั้น ผลคูณ} = -(+4) = -4$$

TAM จดเพิ่มๆๆๆๆๆ

วันนี้เรามาดูการแก้สมการกันบ้างนะ

การแก้สมการตัวแปรเดียว

มาดูตัวอย่างพื้นฐานกันก่อนเลย

Example1 จงแก้สมการ $(x + 3)(x + 2) \geq 0$

Example2 จงแก้สมการ $(x - 4)^3(x + 1)^2(x + 2)^4 \geq 0$

Example3 จงแก้สมการ $(x + 1)(8 - x)(x^2 + 4) \leq 0$

Example4 จงแก้สมการ $\frac{(3-x)(x-4)^2}{(1-x)(x-3)^4} \leq 0$ ถ้ามั่นหารกันทำเหมือนตอนคูณกันเลยแต่ส่วนห้ามเป็นศูนย์

Example5 จงแก้สมการ $\frac{(x^2-9)(x^2-4)}{(x+3)(x+2)} \geq 0$

มาดู ค่าสัมบูรณ์ กันบ้าง

จำนวนตายเลขนะ $|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$

สมบัติสำคัญของ ABSOLUTE

- $|a| \geq 0$
- $|-a| = |a|$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ และ $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ เมื่อ $b \neq 0$
- $|a|^2 = a^2 = |a^2|$

- $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } n \rightarrow \text{จำนวนคี่บวก} \\ |a| & \text{เมื่อ } n \rightarrow \text{จำนวนคู่บวก} \end{cases}$

เช่น $\sqrt[3]{(x+1)^3} = x+1$ แต่ $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$

อันนี้ออกโคตรบ่อย จำให้ไดดดดดดดดด

การแก้สมการที่ติด Absolute

ส่วนใหญ่จะออกแค่ 3 รูปแบบหลักๆอะ ถ้านอกเหนือจากนี้ก็แบ่งกรณีเลย เดี่ยวเรามาดู 3 แบบหลักๆกันก่อนนะ

1. $|\square| = \text{อะไรสักอย่างที่เป็นตัวเลขหรือสมการ}$

EX. จงแก้สมการ $|x^2 - 2x| = 1$

EX. จงแก้สมการ

$$|x - 1| = 1 - x^2$$

พิมพ์สมการที่นี้

แต่ข้อนี้จะต้องตรวจคำตอบด้วย เพราะว่าสมการฝั่งขวามันอาจติดลบได้ แต่ค่า absolute มันไม่ติดลบ

2. $|\square| = \square$ ถ้า $\square \geq 0$

$|\square| = -\square$ ถ้า $\square \leq 0$

EX. จงแก้สมการ $|x^3 - 27| = x^3 - 27$

EX. จงแก้สมการ $|x^2 - 4| = 4 - x^2$

3. $|\square| = |\Delta|$ เราจะได้ว่า $\square = \Delta$ หรือ $\square = -\Delta$

EX. $|x^2 - x| = |x - 1|$

อสมการที่ติดค่าสัมบูรณ์

มีกันอยู่ 3 รูปแบบ ที่เจอบ่อยๆละ

สำหรับอสมการที่ติดค่าสัมบูรณ์ที่นอกเหนือจาก 3 รูปแบบนี้ จะใช้การแบ่งกรณี เดี่ยวค่อยไปดู ดู 3 อันเบสิก ก่อน

1. $|\square| \geq a$ จะได้ว่า $\square \geq a$ หรือ $\square \leq -a$

2. $|\square| \leq a$ จะได้ว่า $-a \leq \square \leq a$

3. $|\square| \geq |A|$

จะได้ว่า $\square \geq A$ หรือ $\square \leq -A$

EX. จงแก้สมการ $|x^2 - 2| \geq 1$

EX. จงแก้สมการ $|2x - 1| \leq 3$

*** “ถ้า $a \leq \square \leq b$ แล้ว $a \leq \square$ และ $\square \leq b$ ” เราจะทำตอนที่ มันคิดเดี่ยวๆไม่ได้ ถ้าน้องยังไม่เห็นภาพว่ามีประโยชน์ยังไง เดี่ยวมันจะมีโจทย์ข้างหลังอยู่นะครับ รอไปเจอทีเดียวนะ

EX. จงแก้สมการ $|x^2 - 3x - 3| > |x^2 + 7x - 13|$

ทีนี้มาดูว่า ตอนไหน ต้องใช้เทคนิคการแบ่งกรณี

EX. จงแก้สมการ $|x - 1| < |x + 2| + 1$

Solution

กรณีที่ 1 $x > 1$

กรณีที่ 2 $-2 < x \leq 1$

กรณีที่ 3 $x \leq -2$

การแก้สมการที่ติด ROOT *****จำไว้เลยว่าให้ยกกำลัง 2 และตรวจคำตอบทุกครั้ง*****

EX. จงแก้สมการ

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$$

Solution ยกกำลัง 2 ข้างเลยยยยยยย.....

$$(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{2x+1})^2$$

ตรวจคำตอบด้วย อย่าลืมนะ %^&*O_OI&*O_{KJHGTYHJM}

การแก้สมการติด ROOT

ขั้นตอนมีดังนี้เลย

1) สร้างเงื่อนไข $\sqrt{\square} \rightarrow \square \geq 0$

2) ยกกำลัง 2 โดย 2 ข้างต้อง ≥ 0

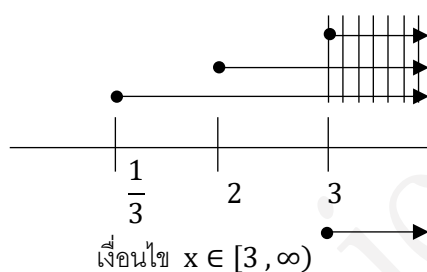
เพราะตอนทำสมการอะ เราต้องมั่นใจก่อนว่าเป็นบวกนะ ถึงยกกำลังสอง สองฝั่งได้

3) นำเงื่อนไขทั้งหมดมา ก กัน

EX. จงแก้สมการ $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} < \sqrt{5x-5}$

1) เงื่อนไข $x-2 \geq 0$ และ $x-3 \geq 0$ และ $5x-5 \geq 0$

$x \geq 2$ $x \geq 3$ $x \geq 1$



2) $\boxed{\geq 0} \leftarrow \boxed{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}} < \boxed{\sqrt{5x-5}} \rightarrow \boxed{\geq 0}$

จากโจทย์พิจารณาได้ว่า 2 ข้างของสมการนั้น ≥ 0

เมื่อเรามั่นใจแล้ว ทีนี้ก็จัดการยกกำลังสองเลย

3)

ตัวอย่างข้อสอบเก่า 9 วิชาสามัญ จำนวนจริง

9 วิชาปี 2560

กำหนดให้ $P(x) = ax^5 + bx^3 + cx + d$ เมื่อ a, b, c, d เป็นค่าคงตัว ถ้า $x - 1$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 10

และ x หาร $P(x)$ เหลือเศษ 6 แล้ว $x + 1$ หาร $P(x)$ เหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -10
2. -6
3. 2
4. 4
5. 6

9 วิชาปี 2557

ถ้า x_1, x_2, x_3 เป็นรากของสมการ $8x^3 + 6x^2 - 5x - 3 = 0$ โดยที่ $x_1 < x_2 < x_3$

แล้ว $x_1 + x_3$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{3}{2}$
2. $-\frac{1}{4}$
3. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{1}{2}$
5. $\frac{3}{4}$

9 วิชาปี 2560

กำหนดให้ $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง

ถ้า $x + 1, x + 2$ และ $x + 3$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ แล้ว $a + b + c$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12
2. 24
3. 32
4. 40
5. 46

9 วิชาปี 2561

ให้ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

ถ้ากราฟของ $y = f(x)$ ตัดแกน x ที่จุด $(-3, 0), (0, 0)$ และ $(2, 0)$ แล้ว $f(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -6
2. -1
3. 1
4. 4
5. 6

9 วิชาปี 2558

กำหนดให้ $P(x) = ax^2 + 9x - 5$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง ถ้า $x - 1$ หาร $P(x)$ แล้วเหลือเศษ 6

แล้วรากที่เป็นจำนวนจริงบวกของสมการ $P(x) = 0$ มีค่าเท่ากับข้อใด

9 วิชาปี 2559

กำหนดให้ $P(x) = ax^5 + bx^3 + cx + d$ เมื่อ a, b, c, d เป็นค่าคงตัว ถ้า $x - 1$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 10 และ x หาร $P(x)$ เหลือเศษ 6 แล้ว $x + 1$ หาร $P(x)$ เหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -10
2. -6
3. 2
4. 4
5. 6

9 วิชาปี 2558

ถ้า $x - 1$ หารพหุนาม $P(x)$ แล้วเหลือเศษ -1 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. $x - 1$ หาร $-P(x)$ เหลือเศษ -1
- ข. $x - 1$ หาร $P^2(x)$ เหลือเศษ 1
- ค. $x + 1$ หาร $P(-x)$ เหลือเศษ 1
- ง. $x + 1$ หาร $-P(-x)$ เหลือเศษ 1

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

9 วิชาปี 2559

ให้ $S = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับสมการ } 6|x - 3| < 5x\}$

จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 14

2. 15

3. 16

4. 17

5. 18

9 วิชาปี 2560

ให้ $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ในช่วง } [-10, 10]\}$

$B = \{x \mid (x + 5)(|x| - 5) \geq -9\}$

จำนวนสมาชิกของ $A \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7

2. 14

3. 16

4. 18

5. 21

9 วิชาปี 2561

จำนวนเต็ม x ที่สอดคล้องกับอสมการ $|2x^2 + 1| - |-x^2 + 2x - 1| \leq 15$ มีทั้งหมดกี่จำนวน

1. 7

2. 9

3. 11

4. 13

5. 15

Maths by icewashi

9 วิชาปี 2558

จำนวนเต็ม x ที่สอดคล้องกับอสมการ $||100 + x| - |100 - x|| < 100$

มีจำนวนทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|-------|--------|-------|
| 1. 49 | 2. 50 | 3. 51 |
| 4. 99 | 5. 100 | |

9 วิชาปี 2559

ถ้า a และ b เป็นค่าคงตัว ซึ่งอสมการ $\frac{x+a}{(x+b)^2} \geq 0$ มีเซตคำตอบคือช่วง $(1, \infty)$

แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|-------|-------|------|
| 1. -2 | 2. -1 | 3. 0 |
| 4. 1 | 5. 2 | |

ปัญหาเชาวน์

9 วิชาปี 2559

กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $P(1) = 10$ และ $P(10) = 2,116$

แล้ว $P(-1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4

2. 10

3. 51

4. 106

5. 1,053

Maths by icewashi

I'm not perfect.
I'm just x good
for $x \rightarrow \infty$.

NUMBER THEORY

ขอบเขตบนของ S คือ จำนวนที่ไม่มีตัวไหนใน S ที่มากกว่ามัน

ขอบเขตล่างของ S คือ จำนวนที่ไม่มีตัวไหนใน S ที่น้อยกว่ามัน

EX. $S = [6, 8]$

ขอบเขตบน $x \geq 8$ ดังนั้นขอบเขตบนน้อยสุด = 8

ขอบเขตล่าง $x \leq 7$ ดังนั้นขอบเขตล่างมากที่สุด = 6

EX. $S = (-8, 3) \cup (5, 9)$

ขอบเขตบน $x \geq 9$ ดังนั้นขอบเขตบนน้อยสุด = 9

ขอบเขตล่าง $x \leq -8$ ดังนั้นขอบเขตล่างมากที่สุด = -8

การหารลงตัว

- $a|b$ หมายถึง b หารด้วย a ลงตัว
- ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$
- ถ้า $a|b$ และ $b|a$ แล้ว $a = b$
- เมื่อ $a|b$ แล้ว $a|bc$ เช่น $2|6$ แล้ว $2|6 \times 5$
- ถ้า $a|(b + c)$ และ $a|b$ แล้ว $a|c$
- ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(bx + cy)$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนเต็ม

จำนวนเฉพาะ prime number (P)

คือจำนวนเต็มที่มีเพียง $1, -1, p, -p$ เท่านั้นที่หาร p ลงตัว

มาดู trick กันนะ

EX. $3|(a^3 - a)$ เพราะ $3| \underbrace{(a-1)(a)(a+1)}$ เช่น $3|15 * 16 * 17$
ผลคูณของจำนวนเต็มเรียงกัน 3 ตัว

การที่มันติดกัน 3 ตัวอะ ยังไงก็ต้องมีตัวที่ 3 หารลงตัวอยู่แล้ว

ดังนั้นเราเลยได้ว่า $n | \text{ผลคูณของจำนวนเต็มที่เรียงกัน } n \text{ ตัว}$

ขอเสริมความรู้หน่อย อันนี้ข้อสอบออกในข้อสอบแข่งขัน พวกเพชรยอดมงกุฎก็มีให้เห็นบ้าง

เรามาดูเทคนิคการหาจำนวนที่หารด้วย $2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ ลงตัว

ที่จะสมมุติว่า จำนวนนั้นหน้าตามันเป็นแบบนี้

$$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$$

1 จะหาร N ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $2|a_0$

3 จะหาร N ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $3|(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$

4 จะหาร N ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $4|a_1 a_0$

5 จะหาร N ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $a_0 = 0$ หรือ $a_0 = 5$

9 จะหาร N ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $9|(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$

10 จะหาร N ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $a_0 = 0$

11 จะหาร N ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $11|(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n)$

Example

การหาร

$$b = aq + r, \quad 0 \leq r < |a|$$

$\nwarrow$ $\nearrow$ $\nwarrow$ $\nearrow$
 ตัวตั้ง ตัวหาร ผลหาร เศษ

- ห.ร.ม. ตัวหารร่วมมาก

หลักการเขียน ห.ร.ม. ของ a, b ซึ่งแทนด้วย (a, b)

ความหมาย ห.ร.ม. ของ a, b หมายถึง จำนวนที่มากที่สุดที่นำไปหาร a, b ลงตัว

- การหาหรม. สามารถหาได้หลายแบบนะ

เทคนิคที่ 1 หาหรม. แบบแยกตัวประกอบธรรมดา

เทคนิคที่ 2 การหาหรม. โดย ทำเป็น 2 พัง

เทคนิคที่ 3 การหาหรม. โดยใช้วิธียุคลิด

EX. หา ห.ร.ม. ของ $(382, 144)$

$$382 = 144(2) + 94$$

$$\begin{array}{r} \text{ } \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array}$$

$$144 = 94(1) + 50$$

$$\begin{array}{r} \text{ } \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array}$$

$$94 = 50(1) + 24$$

$$\begin{array}{r} \text{ } \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array}$$

$$50 = 24(2) + 8$$

$$\begin{array}{r} \text{ } \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array}$$

$$24 = 8(3) + 0$$

$$\therefore (382, 144) = 8$$

จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

มาดูความหมายของมันกัน

โดย จำนวนเต็ม a และ b จำเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อ $(a, b) = 1$

ค.ร.น. ตัวคูณร่วมน้อย

หลักการเขียน ค.ร.น. ของ a, b ซึ่งแทนด้วย $[a, b]$

ความหมาย ค.ร.น. ของ a, b หมายถึง จำนวนที่น้อยที่สุดที่นำเอา a, b ไปหารแล้วลงตัว

จำนะเว้ยยยยยยยยย

$$(a, b) \times [a, b] = ab$$

Maths by icewashii

โจทย์วิชาสามัญ ทฤษฎีจำนวน

อาศัยหลักคล้ายๆม.ต้นในการทำ เรามาดูโจทย์กันเลย

9 วิชาปี 2557

เศษเหลือที่ได้จากการหาร $4^{999} + 9^{555}$ ด้วย 5 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|------|------|------|
| 1. 0 | 2. 1 | 3. 2 |
| 4. 3 | 5. 4 | |

9 วิชาปี 2558

เศษเหลือที่ได้จากการหาร $(995)^{16} + (996)^8 + (997)^4 + (998)^2 + 999$ ด้วย 7 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|------|------|------|
| 1. 1 | 2. 2 | 3. 4 |
| 4. 5 | 5. 6 | |

9 วิชาปี 2559

เศษเหลือที่ได้จากการหาร 11^{111} ด้วย 1,210 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|--------|--------|--------|
| 1. 1 | 2. 11 | 3. 111 |
| 4. 121 | 5. 211 | |

9 วิชาปี 2557

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มี่มากที่สุดที่หาร 166 และ 1101 ได้เศษเหลือ 1 แล้ว n มีค่าเท่ากับเท่าใด

9 วิชาปี 2560

จำนวนเต็มบวก $n > 2$ ที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 18 และ 24 แล้วเหลือเศษ 2 มีค่าอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. [73,77]
2. [78,82]
3. [83,87]
4. [88,92]
5. [93,97]

9 วิชาปี 2557

ถ้า m, n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $m = n + 2$ และ ค.ร.น. ของ m และ n เท่ากับ 180 แล้ว ผลคูณ mn มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 180
2. 270
3. 360
4. 540
5. 720

9 วิชาปี 2558

กำหนดให้ $m, n \in \{100, 101, \dots, 200\}$

ถ้า ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของ m, n คือ 35 และ 525 ตามลำดับ แล้ว $m + n$ มีค่าเท่ากับข้อใด

9 วิชาปี 2560

กำหนดให้ S เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n โดยที่ n หหาร 3,399 แล้วเหลือเศษ 24

จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 8 3. 9 4. 10 5. 11

9 วิชาปี 2561

ให้ S เป็นเซตจำนวนเต็มบวก n โดยที่ $n < 100$ และ n มีตัวหารเป็นจำนวนเต็มบวก 12 จำนวน

ถ้า n_1 คือจำนวนที่น้อยที่สุดใน S ถ้า n_2 คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดใน S แล้ว $n_2 - n_1$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 12 2. 20 3. 36 4. 38 5. 40

Solving equation by one Blondie:

$$\frac{1}{n} \sin x = ?$$

$$\cancel{\frac{1}{n}} \cancel{\sin} x =$$

$$six = 6$$

FUNCTION

- คู่อันดับ

$$(a, b) = (c, d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d$$

$$(a, b) \neq (c, d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a \neq c \text{ และ } b \neq d$$

- ผลคูณคาร์ทีเซียน

$$A \times B = \{ (x, y) / x \in A \text{ และ } y \in B \}$$

- ความสัมพันธ์ Relation

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$

จำนวนความสัมพันธ์จาก A ไป $B = 2^{n(A) \times n(B)}$ ก็คือสูตรคล้ายๆ สับเซตอะ

- โดเมนและเรนจ์

โดเมน (D_r) = เซตของ คู่อันดับ x

เรนจ์ (R_r) = เซตของคู่อันดับ y

วิธีการหา domain และ range

หา D_r	หา R_r
จัดรูป $y =$ เทอมของ x	จัดรูป $x =$ เทอมของ y
ถ้ามีมากกว่า 1 เงื่อนไข ให้นำเอา $\cap$ กัน	

โดยมีเงื่อนไขดังนี้

(1) ถ้าจัดรูปได้ $\frac{\square}{\Delta}$ จากการที่ส่วนห้ามเป็นศูนย์ เลยได้เลยว่า $\Delta \neq 0$

(2) ถ้าจัดรูปได้ $y = \sqrt{\square}$ ได้เลยว่า $\square \geq 0$ เพราะในรูท ต้องมากกว่าศูนย์

(3) ถ้า $y = \log \square$ จะได้เลยว่า $\square > 0$

(4) การหา D_r , R_r โดยดูกราฟ

(5) ถ้าออกแนวอื่น เราก็พลิกแพลงเอาเลย เดี่ยวไปดูตัวอย่างกันนะ

ฝึกหา domain กันก่อนนะ

EX. $r_1 = \{(x, y) \mid y = \sqrt{10 - \sqrt{x^2 - 4}}\}$ จงหา D_{r_1}

EX. $r_2 = \{(x, y) \mid y = \frac{3}{1 - |x - 2|}\}$ จงหา D_{r_2}

ฝึกหา range กัน

EX. $r_1 = \{(x, y) \mid y = \sqrt{10 - \sqrt{x^2 - 4}}\}$ จงหา R_{r_1}

EX. $r_2 = \{(x, y) \mid y = \frac{3}{1-|x-2|}\}$ จงหา R_{r_2}

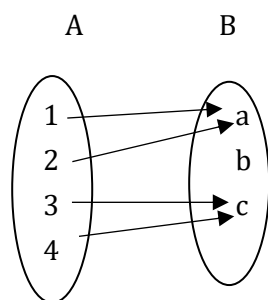
EX. จงหา R_r เมื่อ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{x^2-x+1}{x-1}\}$ สอนเพื่อออกสอบ pat1 ยากนิดนึงนะน้องๆ

ปล. การใช้กราฟในเรื่องความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน พี่ขอข้ามนะครับ เพราะมันไม่ออก 9 วิชาสามัญเลยอะ แล้วก็ส่วนใหญ่ข้อสอบก็ไม่ออกอยู่แล้วอะ ทั้งนี้เราอาจพล็อต คร่าวๆ เอาเองก็ได้ ไม่ยากๆ

ฟังก์ชัน

นิยาม คือ “ ถ้า $(x, y) \in r$ และ $(x, z) \in r$ แล้ว $y = z$ ”

ถ้าพูดเป็นภาษาคณิตคือ จะเป็นฟังก์ชันได้นั้น ก็ต่อเมื่อ x ตัวนั้น ไปจับแค่ Y เดียว

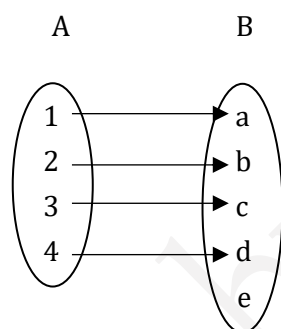


ฟังก์ชัน 1-1

นิยาม คือ “ ถ้า $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$ แล้ว $x_1 = x_2$ ”

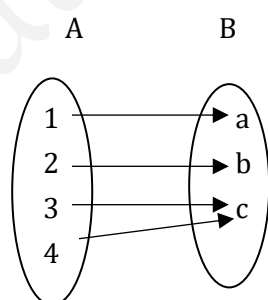
ถ้าพูดให้เป็นภาษาคณิตคือ การที่จะเป็นฟังก์ชัน 1-1 นั้น

1. ต้องเป็นฟังก์ชันก่อน
2. Y ตัวนั้น ต้องถูกจับด้วย X เดียว



ฟังก์ชันทั่วถึง คือ

ฟังก์ชัน A ไปทั่วถึง B หมายถึง B ต้องถูกใช้หมด



Example ข้อใดบ้างที่เป็นฟังก์ชัน

$$r_1 = \{(1,3), (1,4)\}$$

$$r_2 = \{(2,7), (5,7)\}$$

$$r_3 = \{(1,2), (3,4)\}$$

การcheck ว่า เป็น function หรือ function 1-1 มั้ย โดยใช้กราฟ

เช็คฟังก์ชัน ... ลากเส้นแนวดิ่งตัด 1 จุดเสมอเป็นฟังก์ชัน

เช็คฟังก์ชัน 1 - 1 ... ลากเส้นแนวนอนตัด 1 จุดเสมอเป็นฟังก์ชัน 1 - 1 แต่ว่าก่อนที่จะเป็นฟังก์ชัน 1-1 นั้นต้องเป็นฟังก์ชันก่อนนะ

Example

ความสัมพันธ์ข้อต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

1. $r_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x = \sqrt{9-y^2} \text{ และ } xy \geq 0\}$
2. $r_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 + y^2 = 2 \text{ และ } xy > 0\}$
3. $r_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | |x| - |y| = 3\}$
4. $r_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | |x+y| = 4\}$

Solution

Function inverse

ถ้า $f(a) = b$ แล้ว จะได้ว่า จะได้ว่า $f^{-1}(b) = a$

โดยวิธีการแก้หา inverse มีขั้นตอน ดังนี้

1. สลับ y เป็น x และสลับ x เป็น y
2. จัดรูป $y =$ เทอมของ x

EX. กำหนดให้ $f(x) = (x - 8)^3$ จงหา $f^{-1}(x)$

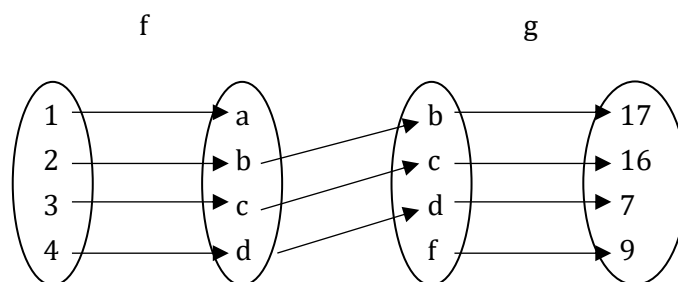
- 1.) สลับ y เป็น x และสลับ x เป็น y

$$y = (x - 8)^3, x \geq 0 \text{ เพราะสลับเป็น } x = (y - 8)^3, y \geq 0$$

$$\begin{array}{lll} \text{ขั้นที่ 2} & \text{จัดรูป} & \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(y - 8)^3}, y \geq 0 \quad ** \\ & & \sqrt[3]{x} = y - 8 \\ & & y = \sqrt[3]{x} + 8 \end{array}$$

$$\text{ดังนั้นจึงได้ว่า } f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 8$$

Composition of function



gof สร้างจาก f ไป g คืออารมณ์ประมาณเดินทางจาก f ไป g 啊

ได้ $\text{gof} = \{(2,17), (3,16), (4,7)\}$

หลักการที่น้องๆ ต้องรู้ ถ้าเราใช้ความเข้าใจก็ไม่ต้องจำอะ ประมาณว่า y ของ f จะเป็นค่า x ของ g

สูตรหรือรูปแบบการเขียน ฟังก์ชัน ที่น้องๆ ต้องรู้

$$\text{gof}(x) = g(f(x))$$

$$(f \circ f^{-1})(\square) = \square$$

$$(\text{gof})^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$(\text{gof}) \circ h(x) = \text{go}(\text{fo}h)(x) = g(f(h(x)))$$

การเอา **function** มาจุ่มกัน 5555555555+

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \neq 0$$

การหา **domain** ของ **function** ที่มาจุ่มกัน

$$\left. \begin{array}{l} D_f + g \\ D_f - g \end{array} \right\} D_f \cap D_g \text{ เพราะเราเอา } f(x) \text{ กับ } g(x) \text{ มาใช้ ทั้งคู่}$$

$$D_f \cdot g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x / g(x) = 0\}$$

เหมือนชาวบ้านแหละ แต่ว่าส่วนห้ามเป็น 0 เฉยๆ

แถมๆๆๆๆๆๆๆ

ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

ฟังก์ชันเพิ่ม $\rightarrow$ x เพิ่ม y เพิ่ม ความชันของกราฟ เป็น +

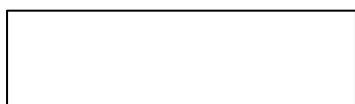
ฟังก์ชันลด $\rightarrow$ x เพิ่ม y ลด ความชันของกราฟ เป็น -

.....

เออ นื่องๆ บทนี้ มันไม่ออก 9 วิชาสามัญ เลยนะ แต่มันจะไปเล่นรวมกับ แคลคูลัส แทนเลยอะ

เดี๋ยวเราก็อปปี้ดูโจทย์ กันในแคลคูลัสนะครับ.....

MATRIX



ชนิดของเมทริกซ์

ชนิดของเมทริกซ์	ลักษณะ	ตัวอย่าง
เมทริกซ์ศูนย์ (O)	เมทริกซ์ที่สมาชิก ทุกตัวเป็นศูนย์	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
เมทริกซ์จัตุรัส	เมทริกซ์ที่จำนวน แถวเท่ากับจำนวนหลัก	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
เมทริกซ์เอกลักษณ์ (I)	เมทริกซ์ที่มี สมาชิกเส้นทแยงมุมหลัก เป็น 1 ทุกตัว	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ทรานสโพส

A^t คือเมทริกซ์ที่เกิดจากการเปลี่ยนเปลี่ยนแถวไปเป็นหลัก

EX. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ จะได้ $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

จากตัวอย่าง เราจะเห็นว่า A มีขนาด $m \times n$ จะได้ว่า A^t มีขนาด $n \times m$

สมบัติของทรานสโพส

- $(A^t)^t = A$ $((A^t)^t)^t = A^t$
- $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
- $(kA)^t = kA^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$

- การบวกและลบเมทริกซ์

$A \pm B$ ก็เอาสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาบวกหรือลบกันได้เลย

EX.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

สมบัติการบวก

สมบัติปิดการบวก	$A + B$ เป็นเมทริกซ์
สมบัติการสลับที่การบวก	$A + B = B + A$
สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก	$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก	$A + \underline{0} = \underline{0} + A$
สมบัติการมีอินเวอร์สการบวก	$A + (-A) = \underline{0} = (-A) + A$

การนำเอาค่าคงที่คูณเมทริกซ์ ให้นำเอาค่าคงที่ คูณเข้าไปทุกตัวได้เลย

EX. $3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

EX.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1) + 2(3) & 1(2) + 2(-1) & 1(4) + 2(3) \\ 3(1) + 4(3) & 3(2) + 4(-1) & 3(4) + 4(3) \\ 5(1) + 6(3) & 5(2) + 6(-1) & 5(4) + 6(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 10 \\ 15 & 2 & 24 \\ 23 & 4 & 38 \end{bmatrix}$$

สมบัติของการคูณ

เอกลักษณ์การคูณ	$AI = A = IA$
-----------------	---------------

การมีอินเวอร์สการคูณ	$AA^{-1} = I = A^{-1}A$ เมื่อ A^{-1}
การเปลี่ยนกลุ่มการคูณ	$A(BC) = (AB)C = ABC$ เมื่อ AB, BC หาค่าได้
การแจกแจง	$A(B \pm C) = AB \pm AC$ $(B \pm C)A = BA \pm CA$

จำไว้ใส่หัวเลยว่า $AB \neq BA$

ทำให้ $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$$

DETERMINANT (Det)

หลักการหา **det**

เมทริกซ์ขนาด 1×1 $A = [a]$ จะได้ $\det A = a$ ปยอ.ไม่มีอะไรเลย

เมทริกซ์ขนาด 2×2

อยู่บนเครื่องหมายตรงข้าม ได้เท่ากับ - bc

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

อยู่ล่างเครื่องหมายเหมือนเดิม ได้เท่ากับ ad

เมทริกซ์ขนาด 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

หา $\det A$ โดยนำ 2 หลักแรกมาต่อท้ายหลักที่ 3 แล้วทำเหมือน 2×2 เลย

$$\text{จะได้ } \det A = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} = ae i + b f g + c d h - g e c - h f a - i d b$$

อยู่บนเครื่องหมายตรงข้าม

อยู่ล่างเครื่องหมายเหมือนเดิม

ทั้งนี้ เราสามารถหา $\det$ โดยวิธีใช้ cofactor ช่วยก็ได้ (ขอให้น้องไปอ่านตรง cofactor ก่อนนะครับ)

การใช้โคแฟกเตอร์ในการหา **det** ของเมทริกซ์ $n \times n$

วิธีการหา $\det$

1. เลือกแถวหรือหลักไหนก็ได้ มา 1 แถว/หลัก
2. หา cofactor ของตำแหน่งที่เลือกมา
3. เอาสมาชิกในตำแหน่งนั้น คูณกับค่า Cofactor ของตำแหน่งที่เลือกมาแล้วนำมาบวกกัน

แล้วก็จะได้ ค่า $\det$ นั้นเอง

EX. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา $\det$

Solution

เลือกตัวดำเนินการตามแถวที่ 2 ควรเอาแถว/หลักที่คิดง่าย ๆ

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \det A &= 0C_{21}(A) + 5C_{22}(A) + 0C_{23}(A) \\ &= 5(+M_{22}(A)) = 4 \left(+ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$= 4((2)(2) - 2(4)) = -16$$

สมบัติของ $\det$

1. $\det(AB) = (\det A)(\det B)$
2. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$; $\det A \neq 0$
3. $\det(A^t) = \det A$
4. $\det(kA) = k^n \det A$; n คือ มิติของเมทริกซ์ A
5. $\det(A^n) = (\det A)^n$
6. $\det(\text{adj } A) = (\det A)^{n-1}$

Minor และ Cofactor

Minor : $M_{ij}(A)$ คือ ค่า $\det$ ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j

Cofactor: $C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$

EX.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$M_{11}(A) = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

$$C_{11}(A) = (-1)^{1+1} M_{11}(A) = +M_{11}(A) = 10$$

Inverse ของ matrix

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

การหา inverse

เมทริกซ์ขนาด 1×1

$$\text{ถ้า } A = [a] \text{ จะได้ } A^{-1} = \left[\frac{1}{a} \right] ; a \neq 0$$

EX.

ถ้า $A = [2]$ จะได้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

อันนี้ไม่มีอะไร ปยก 555555

เมทริกซ์ขนาด 2×2 ใช้หลักการสลับที่พจน์อง ดุ้ยท่องน้องพี

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$; $\det A \neq 0$

โดยถ้า $\det A = 0$ มันจะเป็นเมทริกซ์เอกฐาน ก็คือ ไม่มี A^{-1}

EX. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

Solution จะได้ $\det A = (1)(4) - (2)(3) = -2$

และ $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ขนาด $n \times n$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

เมื่อ $\det A \neq 0$

โดยที่ $\text{adj } A = [C_{ij}(A)]^t$

เมทริกซ์ผกผัน

ตัวอย่างการหาอินเวอร์สสำหรับเมทริกซ์ขนาด 3×3

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

$$\text{Sol}^n \quad \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -16$$

$$\text{adj } A = [C_{ij}(A)]^t = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} +M_{11}(A) & -M_{12}(A) & +M_{13}(A) \\ -M_{21}(A) & +M_{22}(A) & -M_{23}(A) \\ +M_{31}(A) & -M_{32}(A) & +M_{33}(A) \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -10 \\ -10 & -4 & 6 \\ -20 & 0 & 10 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 10 & -10 & -20 \\ 0 & -4 & 0 \\ -10 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A = \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} 10 & -10 & -20 \\ 0 & -4 & 0 \\ -10 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

สมบัติของinverse

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. โดยปกติ $(A \pm B)^{-1} \neq A^{-1} \pm B^{-1}$

Operation of matrix

1. ถ้าเมทริกซ์มีแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งเป็น 0 ทั้งหมด
det จะเท่ากับ 0

เช่น $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$

2. ถ้าเมทริกซ์มีสองแถวใด หรือสองหลักใดเท่ากัน

$\det$ จะเท่ากับ 0

เช่น $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

3. เมทริกซ์ B เกิดจากเอาเมทริกซ์ A มาสลับแถวคู่ใดคู่หนึ่ง หรือหลักคู่ใดคู่หนึ่ง

จะได้ว่า $\det B = -\det A$

เช่น $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ และ $B = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}$ จะได้ $\det B = -\det A$

4. เมทริกซ์ B เกิดจากการนำเอาค่าคงที่ K คูณเข้า เมทริกซ์ A แถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่ง จะได้ว่า $\det B = k(\det A)$

เช่น $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$ และ $B = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{vmatrix} = 2(2) = 4$

5. ถ้านำค่าคงที่คูณแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่ง แล้วนำไปบวกกับแถวหรือหลักอีกอันหนึ่ง

จะเกิดเมทริกซ์ใหม่ซึ่งมีค่า $\det$ เท่าเดิม

เช่น $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \xrightarrow{R_1+3R_2} \begin{vmatrix} 1+3(3) & 2+3(4) \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 14 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$
 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \xrightarrow{C_1+6C_2} \begin{vmatrix} 1+6(3) & 3 \\ 1+6(5) & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 3 \\ 31 & 5 \end{vmatrix} = 2$

6. (อันนี้ยังไม่เคยเห็นออกข้อสอบเลยนะ) กรณีเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยม

$\det$ ของเมทริกซ์นั้น เท่ากับ ผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก

$\begin{vmatrix} 1 & -28 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 5 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -70$, $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 70$

การใช้เมทริกซ์ช่วยหาคำตอบของสมการ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

เราจะเขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

จำสูตรนี้ไว้ก็ดีนะ มันเคยออกข้อสอบปีนึง

*****ถ้า $\det A \neq 0$ ระบบสมการเชิงเส้นมีคำตอบ 1 ชุด*****

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้กฎของคราเมอร์

ออกทุกปีเลยน้องงงงงงงงง เดี่ยวอันนี้พี่สอนเอง

Example $4x+2y-z = 0$

$$x - y = 3$$

$$5x-3y+2z = -1$$

จงหา x, y และ z

เราจะแก้โดยใช้กฎของคราเมอร์แก้

การหาอินเวอร์สโดยวิธีการดำเนินการตามแถว

หลักการคือ $[A \mid I] \sim [I \mid A^{-1}]$

EX. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

solution

เริ่มจาก เอา A มาเขียนในรูป $[A | I]$ แล้วดำเนินการตามแถวเพื่อให้อีกฝั่งมันเป็น I

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad R_2 - R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad R_3 - R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad R_2 + R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad R_1 + R_2$$

$$\text{ดังนั้น } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ทีนี้เราจะจบละ พี่ขอถามอันนี้นะ

ถ้าเจอแบบนี้ $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 3 \\ b & 0 & -1 & 3 \\ c & 2 & -2 & -4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$

มันหมายความว่า 2 ระบบ นี้ ค่า x, y, z มันเท่ากัน

คือ สมการนี้อะ $ax+2y+z = 3$

$$bx-z = 3$$

$$cx+2y-2z = -4$$

กับ

$$x+2y+z = 3$$

$$Y=-3$$

$$Z= 5$$

2 ระบบนี้พอแก้ออกมา ค่า x, y, z มันเท่ากัน

ตัวอย่างข้อสอบเก่า 9 วิชาสามัญ **MATRIX**

9 วิชาปี 2558

ในระบบสมการเชิงเส้นที่มี 3 สมการ และ 3 ตัวแปร x, y, z

ถ้าหา z ได้เท่ากับ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ จากการใช้กฎของคราเมอร์ แล้ว $x + y$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -4

2. -2

3. 2

4. 4

5. 6

9 วิชาปี 2559

ถ้า S เป็นเซตจำนวนจริง a ซึ่งทำให้ระบบสมการ $ax + 2y - 2z = -1$

$$x + y - z = 0$$

$$2x + y + 2z = 2$$

มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว แล้ว S คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ 2. $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ 3. $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ 4. $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ 5. $\{-2, -1, 1, 2\}$

9 วิชาปี 2560

กำหนดระบบสมการ $AX = B$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 0 & -1 \\ c & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

ถ้า $\begin{bmatrix} a & 2 & 1 & 3 \\ b & 0 & -1 & 3 \\ c & 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(A)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -8 2. -4 3. -1 4. 4 5. 8

9 วิชาปี 2559

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ 3×3 ซึ่ง $[A : I] \sim [I : P]$ โดยที่ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ 3×3

และ $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ถ้า $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ แล้ว a มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -17 2. -5 3. $-\frac{17}{5}$
4. $\frac{5}{17}$ 5. $\frac{17}{5}$

9 วิชาปี 2557

กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง

ถ้า $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & b \\ -1 & 0 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ โดยกำหนดการดำเนินการตามแถว $R_2 - 3R_1$

แล้ว $a + c$ มีค่าเท่ากับข้อใด

9 วิชาปี 2558

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 ซึ่ง $A = [a_{il}]$ และ $\det(A) = 10$

ถ้า $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(A + B)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

9 วิชาปี 2560

กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วม $d > 0$

และ $b_1, b_2, b_3, \dots, b_9$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมีอัตราส่วนร่วม $r > 0$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} = d$

ข. $\det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = r$

ค. $\det \begin{bmatrix} 2^{a_1} & 2^{a_2} & 2^{a_3} \\ 2^{a_4} & 2^{a_5} & 2^{a_6} \\ 2^{a_7} & 2^{a_8} & 2^{a_9} \end{bmatrix} = 2^d$

ง. $\det \begin{bmatrix} b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_4^2 & b_5^2 & b_6^2 \\ b_7^2 & b_8^2 & b_9^2 \end{bmatrix} = r^2$

จำนวนข้อความที่ถูกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความถูก)

2. 1

3. 2

4. 3

5. 4

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(AB^{-1})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -98 2. $\frac{1}{2}$ 3. 1 4. 2 5. 98

9 วิชาปี 2558

กำหนดให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และ I แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ โดยที่ A, B, C และ I มีมิติกัน
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. ถ้า $AB = AC$ แล้ว $B = C$
ข. ถ้า $A^2 = I$ แล้ว $A^{-1} = A$
ค. ถ้า $AB = I$ และ $CA = I$ แล้ว $B = C$
ง. ถ้า $AB = I$ แล้ว $\text{adj}(B) = [\det(A)]A$

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 1 3. 2
4. 3 5. 4

9 วิชาปี 2561

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 และ I เป็นไทรกซ์เอกลักษณ์การคูณมิติ 3×3

ถ้า $AB^t = I$ แล้ว พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $AB^t = B^t A$

ข. $A^{-1} = B^t$

ค. $B^{-1} = A^t$

ง. $(AB)^{-1} = (BA)^t$

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก)

2. 1

3. 2

4. 3

5. 4

9 วิชาปี 2557

กำหนดให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 ซึ่ง $\det(A) > 0$

และ $M_{ij}(A)$ เป็นไมเนอร์ของ a_{ij} โดยที่ $[M_{ij}(A)] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

ถ้า $A^{-1} = [b_{ij}]$ แล้ว $b_{11} + b_{12} + b_{13}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{25}$

2. $\frac{4}{25}$

3. $\frac{3}{5}$

4. $\frac{4}{5}$

5. $\frac{9}{5}$

9 วิชาปี 2560

กำหนดให้ $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in S \right\}$

ถ้าสุ่มเมทริกซ์จากเซต W มา 1 เมทริกซ์ แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ B ซึ่ง $AB = BA$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{17}{625}$
2. $\frac{19}{625}$
3. $\frac{21}{625}$
4. $\frac{23}{625}$
5. $\frac{25}{625}$

9 วิชาปี 2558

กำหนดให้ $S = \left\{ [a_{ij}]_{3 \times 3} \mid a_{ij} \in \{-1, 1\} \right\}$ ถ้าสุ่มหยิบเมทริกซ์จากเซต S มา 1 เมทริกซ์

แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ซึ่งผลรวมของสมาชิกทั้งหมดเท่ากับ 3 มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{23}{2^9}$
2. $\frac{21}{2^8}$
3. $\frac{21}{2^7}$
4. $\frac{19}{2^6}$
5. $\frac{23}{2^6}$